ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Ιανουάριος 2013:

ΘΕΜΑ 1: Θεωρούμε απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως:
$T(x,y,z) = (x+2y,\ 2x+ky-z,\ 2x-kz)$
Να βρείτε όλα τα $k \in \mathbb{R}$ ώστε η διάσταση της εικόνας της T να είναι 2. Για τις τιμές του k που βρήκατε να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

α) μία βάση του πυρήνα και μία βάση της εικόνας της απεικόνισης T.

β) ο πίνακας A της T στη βάση $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ του χώρου $\mathbb{R}^3$

γ) ο πίνακας B της T στη βάση $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ του χώρου $\mathbb{R}^3$

δ) ένας αντιστρέψιμος 3x3 πίνακας P ώστε: $B = P^{-1} A P$

ΘΕΜΑ 2: Βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα που ακολουθεί και γράψτε τον ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ΘΕΜΑ 3: Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a+2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a+2 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a+2 \end{bmatrix}$$ nxn διάστασης

ΘΕΜΑ 4: Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T: V \to W$. Εάν μία βάση του πυρήνα της T είναι η εξής $\{x_1, \dots, x_s\}$, μία βάση της εικόνας της T είναι η εξής $\{y_1, \dots, y_r\}$, και τα διανύσματα $\{z_1, \dots, z_r\}$ του V να έχουν την ιδιότητα: $T(z_i) = y_i$, $1 \le i \le r$, τότε να δείξετε ότι το σύνολο $\{x_1, \dots, x_s, z_1, \dots, z_r\}$ αποτελεί βάση του V

ΘΕΜΑ 5: Στον ευκλείδειο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$, θεωρούμε τους υποχώρους του $\mathbb{R}^4$:

$V = \{(s+2t-2u, 2t, 2s+3t-4u, -s+t+2u) \mid s,t,u \in \mathbb{R}\}$

και

$W = \{(x,y,z,w) \mid x+y-z-w=0 \;\&\; x+y+z-2w=0\}$

Να προσδιοριστούν οι βάσεις και οι διαστάσεις των υποχώρων $V, W, V \cap W, V+W$. Να βρείτε ένα χώρο V' τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^4 = V \oplus V'$ και ένα χώρο W' τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$.

ΘΕΜΑ 6: Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$x+2y+z=-6a$

$x+2y+(b+1)z=4$

$3x+by+2z=3a$

i) να έχει μοναδική λύση

ii) να μην έχει λύση

iii) να έχει άπειρες λύσεις.